El Sentido numérico: Como la Mente Crea las matemáticas

Por Stanislas Dehaene, Reseñado por Víctor Padron.

The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics Stanislas Dehaene, Oxford University Press, 1997. ISBN: 0-19-513240-81

Boletín de la Asociación matemática Venezolana, Vol. IX, No. 1 (2002)

En 1954, en pleno auge del constructivismo de Piaget, Tobías Dantzing escribió: "El ser humano, aun en sus estados primarios de desarrollo, posee una facultad la cual, por no encontrar un nombre mejor, llamare sentido numérico. Esta facultad le permite reconocer que algo ha cambiado en una colección pequeña cuando, sin su conocimiento directo, un objeto ha sido eliminado o agregado a la colección"

1 Este punto de vista que proclama la existencia de facultades cognoscitivas innatas en el cerebro humano, se encuentra en abierta contradicción con la tesis sustentada por Piaget según la cual el cerebro humano, partiendo de cerro construye todas sus estructuras cognoscitivas por medio de un proceso dialéctico de interacción con el mundo circundante. Este proceso se llevaría a cabo, a partir del mismo momento del nacimiento, a lo largo de distintas etapas claramente diferenciadas. De acuerdo a esta teoría el concepto de número no comienza a formarse en el cerebro del niño antes de los cuatro o cinco años. Cabe entonces preguntarse: ¿Cual de estos dos planteamientos se ajusta mejor a la realidad? Stanislas Dehaene, un matemático convertido en neuropsicólogo, nos da su respuesta a esta interrogante en el libro"The Number Sense: How the mind Creates Mathematics".
A partir de un análisis amplio y detallado de experimentos recientes en el campo de la neurología, Dehaene apoya el punto de vista de Tobías Dantzing y señala que por lo menos este aspecto del constructivismo de Piaget esta equivocado. Dehaene sustenta la tesis de que ciertas facultades numéricas se encuentran genéticamente impresas en nuestro cerebro las cuales, como nuestra facultad para distinguir colores, son el resultado de un proceso evolutivo de adaptación por selección natural. Este sentido numérico es el punto de partida para la construcción de un "0 cerebral" dedicado a la representación aproximada[1] geométrica de los conceptos numéricos, el cual sirve de base intuitiva para la adquisición y manipulación de las nociones aritméticas elementales. A lo largo de su libro Dehaene aborda algunas de las consecuencias que estos hallazgos tienen en la pedagogía, práctica y filosofía de la matemática. En lo pedagógico se validan los métodos de enseñanza que parten de la formulación de ejemplos concretos, con la finalidad de estimular el razonamiento intuitivo del niño, para construir progresivamente los conceptos abstractos. Este proceso no es muy distinto al que se lleva a cabo durante la invención matemática, en donde la participación del razonamiento intuitivo ha sido ampliamente documentada. En el terreno filosófico Dehaene busca una conciliación entre Platonismo e Intuicionismo a

[1] Dantzig, T. (1954). Number: The Language of Science. New York, The Free Press.

partir de una visión semiempírica de la actividad matemática que se enmarca en su concepción evolucionista del proceso de conocimiento.

Los experimentos en neurociencia expuestos a lo largo del libro sustentan la tesis de que en el dominio de la aritmética elemental nuestro cerebro utiliza al menos dos formatos para representar los numeros.Un formato simbólico, sustentado en nuestras facultades de lenguaje, para la manipulación exacta de signos y algoritmos numéricos; y un tipo de representación independiente del lenguaje, localizado en los circuitos del cerebro asociados con lo visual y espacial, que es usado para el calculo aproximado de cantidades numéricas. Nuestras habilidades en aritmética elemental serıan el resultado de una integración dinámica de estos dos tipos de representación. Dehaene destaca que ya Von Neuman se había adelantado a estos descubrimientos con una visión acertada del cerebro humano como una maquina mixta análogo-digital:"...los procesos que se llevan a cabo a través del sistema nervios podrían, como lo he señalado antes, cambiar su carácter de digital a analógico y de regreso a digital, etc., repetidamente. Los pulsos nerviosos, es decir la parte digital del mecanismo, podrían controlar una parte de tales procesos, por ejemplo la contracción de un cierto músculo o la secreción de una sustancia química específica. Estos son fenómenos pertenecientes a la clase analógica, pero podría ser el origen de una cadena de impulsos nerviosos que se originan al ser estos percibidos por los receptores internos adecuados" [2]
La representación analógica podría estar relacionada con las facultades numéricas que se observan en los recién nacidos y en algunos[3] animales, esta ubicada en el plano inconsciente y parece servir de soporte intuitivo a la representación simbólica.

A partir de la descripción de algunos experimentos ingeniosos Dehaene distingue los siguientes estadios en el desarrollo del sentido numérico del niño:
1. Los recién nacidos rápidamente distinguen dos objetos de tres y quizás tres de cuatro, mientras que sus oídos notan la diferencia entre dos y tres sonidos.
2. Los bebes de al menos seis meses de edad son capaces de reconocer números pequeños de objetos o sonidos y combinarlos en operaciones ele-mentales de sumas y restas.
3. A los quince meses los bebes empiezan a seleccionar espontáneamente el mayor entre dos conjuntos de juguetes, mostrando los primeros rudimentos de comparación numérica. Estos son solamente los primeros pasos en la construcción de un "ó cerebral", ubicado en el lóbulo parietal inferior de nuestro cerebro, que Dehaene llama de manera metafórica "acumulador numérico". Esta metáfora sirve para significar la naturaleza analógica y no digital de la representación numérica primitiva que se encuentra en nuestros cerebros. Se caracteriza por un tipo descodificación aproximada, mas parecida a una balanza mecánica que a un reloj digital. Dehaene destaca dos características básicas en nuestra representación numérica primitiva que permiten sustentar su tesis del acumulador numérico. La primera, llamada "Efecto de la distancia", se manifiesta experimentalmente en un aumento considerable del tiempo, medido en milisegundos, que tomamos para comparar dos números en la medida que los números son mas cercanos. Por ejemplo, en uno de los experimentos documentados llevados a cabo en adultos se observa de manera sistemática que se toma mas tiempo en decidir que 71 es mas grande que 65 que la misma decisión entre 79 y 65. Esta discrepancia no podría ser

---

[2] La representación de tipo simbólico, al estar sustentada en el lenguaje, es propia de la especie humana y pareciera pertenecer principalmente al dominio de la mente consciente.

[3] Von Neumann, J. (1958). The Computer and the Brain. New Haven, CT: Yale UniversityPress

explicada satisfactoriamente si nuestra representación numérica instintiva fuera de tipo digital. No es difícil imaginar que cualquier algoritmo numérico implementado en una calculadora digital tardaría esencialmente el mismo tiempo, por pequeño que este sea, en procesar ambos problemas. La otra característica, llamada "Efecto de magnitud", es similar a la anterior pero esta asociada con el tamaño de los números a comparar: para distancias iguales entre los numerales, el desempeño decrece en la medida que los números a comparar se hacen más grandes.

Progresivamente, a partir del análisis cuidadoso de numerosos experimentos conducidos en animales, niños y adultos, Dehaene hace surgir la semblanza del órgano en nuestro cerebro que se especializa en el procesamiento numérico intuitivo:
1. Sus características lo conectan inequívocamente con las habilidades proto numéricas que se encuentran en los animales y niños.
2. Sirve de soporte para nuestra representación numérica simbólica. Cada vez que al cerebro adulto se le presenta un numeral, rápidamente lo con-vierte en una magnitud analógica interna que preserva las relaciones de proximidad entre cantidades.
3. Puede codificar con bastante precisión conjuntos cuya cantidad no exceda3.
4. Tiende a confundir números en la medida en que se hagan más grandes y cercanos.
5. También tiende a asociar a las cantidades numéricas con un mapa espacial, legitimando así la metáfora mental de la línea numérica orientada en el espacio. Debido a la observación Nº 4 esta línea numérica pareciera estar codificada en una escala logarítmica.

Las implicaciones pedagógicas de estos descubrimientos son enormes. Ponen en evidencia la existencia de un **mecanismo bidireccional en el aprendizaje de las matemáticas que se mueve entre los niveles de la mente consciente e inconsciente**. Al nivel de la mente consciente el **niño codifica los conceptos aritméticos a través del uso del lenguaje simbólico y la memorización de algoritmos numéricos**. Sin embargo existe un substrato, ubicado en la profundidad de la mente inconsciente, en donde se encuentran representadas nuestras facultades protonuméricas. Este acumulador numérico primitivo soporta la adquisición de las primeras nociones numéricas elementales. Permite que su asimilación se realice con naturalidad, al tiempo que los nuevos conceptos se van filtrando desde la mente consciente hacia el subconsciente. **Una vez que estos conocimientos son codificados en el ámbito intuitivo pueden servir a su vez de apoyo para la adquisición de otros conceptos, en un proceso dinámico, complejo y estimulante que permite la adquisición progresiva de los conocimientos matemáticos.º** Es lamentable que con el tipo de educación que comúnmente reciben los niños en el ámbito escolar, en donde se hace demasiado énfasis en los conceptos abstractos y la memorización rutinaria de tablas y algoritmos numéricos, se piérdala continuidad de este proceso. Se estanca el desarrollo del substrato numérico instintivo y con ello se derrumba el soporte intuitivo para la adquisición de los nuevos conceptos. Esto trae consigo la pérdida de motivación por parte del niño, al hacerse cada vez más difícil y tediosa la memorización de los conocimientos. A partir de aquí el fracaso en el aprendizaje de las matemáticas esta asegurado. Dehaene expresa su adherencia a este punto de vista y aboga por la necesidad de propiciar un tipo de enseñanza que busque generar una respuesta profunda en el niño, que le permita **tomar contacto con sus recursos intuitivos**. Propone que debemos tratar de fundamentar los conocimientos matemáticos en situaciones concretas, **con la ayuda de recursos gráficos y geométricos, en ves del uso exagerado de conceptos abstractos**. En breve, nos dice Dehaene, debemos ayudarlos a que construyan un **repertorio rico de "modelos mentales" en aritmética.** Este proceso se puede **extrapolar y aplicar en los distintos niveles de la enseñanza, aprendizaje y práctica de la matemática**. Ha sido ampliamente documentado por Hadamard que al menos una porción significativa del proceso de **invención en matemática se lleva a cabo con la participación de facultades inmersas en el dominio de la mente inconsciente**. Después de analizar los resultados de las entrevistas realizadas a un grupo selecto de investigadores, Hadamard concluye que durante los perıodos críticos de actividad creativa la mayoría de ellos evitan no solo el uso de palabras mentales sino también el uso de signos mentales de tipo algebraico u otra forma de simbología precisa. Típicamente sustentan sus exploraciones con un lenguaje de imágenes vagas, sonidos y hasta de movimientos musculares. Los experimentos presentados por Dehaene sustentan fehacientemente algunas de estas evidencias. Sobre todo las que se ubican en el dominio de la actividad mental preconciente, con una participación casi simultanea de los dominios consciente e inconsciente. Por otra parte en cuanto al proceso conocido como incubación, en donde se supone que por largos periodos la actividad creativa se realiza de manera independiente por el inconsciente, **las investigaciones presentadas por Dehaene no aportan ningún sustento experimental. Sin embargo Dehaene expresa su esperanza de que con las técnicas modernas de imagen cerebral podamos algún día detectar e interpretar las trazas sicológicas de este tipo de actividad inconsciente**.

El punto de vista esbozado hasta ahora sobre la enseñanza y práctica de la matemática se inserta en la corriente filosófica del intuicionismo. Para los intuicionistas la matemática es una creación de la mente humana que se construye a partir de la formalización de ciertas intuiciones físicas, numéricas, geométricas o lógicas. Se diferencia del platonismo en que este en lugar de concebir a las matemáticas como una actividad de origen humano, considera que las matemáticas pertenecen a un mundo suprahumano: el mundo de las ideas. Para los platonistas los humanos no creamos las matemáticas, las descubrimos. Otra concepción filosófica que en este sentido se encuentra mas cerca al intuicionismo pero que al mismo tiempo se le contrapone es el formalismo. Para los formalistas las matemáticas son puramente un juego de manipulación de símbolos siguiendo un sistema preciso de reglas formales. Los objetos matemáticos como los números no tienen ninguna existencia real o intuitiva.[4] (Page 102)

Aun cuando podríamos considerar que para los formalistas es natural concebir a las matemáticas como un producto de la creatividad humana, en realidad para ellos las discusiones sobre el origen de los objetos de la matemática carecen de sentido. Claramente la teoría de los intuicionistas es la que mas se acerca a explicarlos procesos mentales que se llevan a cabo en la formación de los conceptos numéricos. **La estructura de la teoría de números esta sustentada, al menos en parte, en las intuiciones que surgen de las facultades protonuméricas ancladas en el cerebro humano. "Como humanos", dice Dehaene, "nacemos con intuiciones sobre números, conjuntos, continuidad, iteraciones, lógica y la geometría del espacio.** Los matemáticos luchan con la reformulación de estas intuiciones y las transforman en sistemas de axiomas lógicamente coherentes, pero no hay garantía de que esto sea completamente posible". (Pág. 245)

[4] Hadamard, J. (1945). The Mathematicians Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton Science Library. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Luego agrega" de acuerdo al punto de vista evolucionista que yo defiendo, las **matemáticas son una construcción humana y por lo tanto constituyen necesariamente una empresa imperfecta y revisable**"(Pág..247), aquí Dehaene adopta una postura filosófica mas reciente y controvertida, cuyos principales representantes son Karl R. Popper, en la filosofía de la ciencia, e Imre Lakatos, en la filosofía de la matemática. Esta corriente filosófica se fundamenta en un concepto semiempírico de la práctica matemática que surge de la epistemología evolutiva de Popper. Manteniendo esta perspectiva, pero sin pretender con ello resolver la controversia filosófica que introduce la interrogante de sı el universo esta diseñado de acuerdo a leyes matemáticas, Dehaene propone:"¿No serán mas bien nuestras leyes matemáticas, y los principios organizativos de nuestro cerebro antes de ellas, las que fueron seleccionadas de acuerdo a que tan cerca ellas se amoldan a la estructura del universo? El milagro de la efectividad de las matemáticas, tan apreciado por Eh gene Wigner, podría ser explicado por evolución selectiva, así como el milagro de la adaptación del ojo a la visión. Si la matemática de hoy es eficaz, podría ser quizás porque las matemáticas ineficaces de ayer fueron brutalmente eliminadas y reemplazadas"(Pág.. 251)Aun cuando confesamos nuestra inclinación en adoptar la primera parte de este planteamiento, no le queda a uno menos que admitir que Dehaene muestra en su ultima frase una visión un tanto simplista de las matemáticas. La validación de las teorías matemáticas no se basa exclusivamente en la eficacia de sus aplicaciones. Si bien es cierto que algunas áreas de las matemáticas tienen un origen estrechamente ligado a las ciencias naturales, en otras este vınculo se encuentra bastante diluido. La historia de las matemáticas esta llena de ejemplos de teorías que se originaron a partir de motivaciones puramente formales o estéticas, alejadas de toda inspiración con la realidad, que luego terminaron convirtiéndose en resultados de gran utilidad y eficacia para la explicación de algunos fenómenos naturales. Sin embargo también existe mucha matemática, quizás la mayor parte de su edificio teórico, que no ha encontrado, y posible-mente nunca encontrara, un camino hacia las aplicaciones. Estas no han sido, como sugiere Dehaene, brutalmente eliminadas y reemplazadas. En los últimos parágrafos de su libro Dehaene plantea una posible conciliación entre platonistas e intuicionistas:"La hipótesis de la adaptación parcial de las teorías matemáticas a las regularidades del mundo físico quizás proporcione las bases para la reconciliación entre platonistas e intuicionistas. El platonismo toca un elemento innegable de verdad cuando insiste en que la realidad física esta organizada de acuerdo a estructuras que anteceden la mente humana. Sin embargo, yo no diría que esta organizaciones de naturaleza matemática. Mas bien, es la mente humana que la traduce en matemática"(Pág.. 251)El debate sigue abierto y ciertamente Dehaene lo alimenta y estimula con su libro. Presenta de manera organizada y con sentido crıtico los aportes de la neuropsicología al conocimiento de los procesos mentales en la creación matemática. Con ello invita al estudio de las implicaciones de estos resultados en la enseñanza, práctica y filosofía de la matemática.

Víctor Padron

Escuela de Matemáticas Universidad de Los Andes Mérida, Venezuela
http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol9/vpadron-libro.pdf